ΣUMMA

U blog - site

2018

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΟΜΑΔΕΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

# ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

**Τα sites – blogs που συμμετέχουν σε αλφαβητική σειρά:**

*blogs.sch.gr/pavtryfon/ Επιμελητής: Παύλος Τρύφων*

*eisatopon.blogspot.gr/ Επιμελητής: Σωκράτης Ρωμανίδης*

*evripidis.freebsdgr.org/ Επιμελητής: Θεμελής Ευριπίδης*

*lisari.blogspot.gr/ Επιμελητής: Μάκης Χατζόπουλος*

*perikentro.blogspot.gr/ Επιμελητής: Κώστας Κουτσοβασίλης*

*www.askisiologio.gr / Επιμελητής: Βασίλης Μποζατζίδης*

*www.askisopolis.gr / Επιμελητής: Στέλιος Μιχαήλογλου*

*www.mathink.gr/ Επιμελητής: Πάνος Γκριμπαβιώτης*

**Διάρκεια:** 3 ώρες

**Ημερομηνία:** 12/5/2018

**Έκδοση:** 1η

***αφιερωμένο*** *στους υπεύθυνους εκπαιδευτικούς*

*που προσπαθούν, ενημερώνονται και αναζητούν καθημερινά υλικό*

*σε διαδικτυακούς τόπους (sites – blogs – forum – facebook)*

*για να γίνουν* ***καλύτεροι****!*

**Εισαγωγή**

Όταν ενώνονται 8 μαθηματικά sites – blogs και μόνο αυτό είναι γεγονός! Ένα δείγμα πολιτισμού, παιδείας και ένδειξης ότι τα μαθηματικά είναι πιο πάνω από ονόματα και link! Η **Σumma – Union** είναι μια μάζωξη, μια ένωση μαθηματικών sites που αυθόρμητα αποφάσισαν να ενώσουν τις δυνάμεις τους και να αναρτήσουν από κοινού ένα διαγώνισμα προσομοίωσης για τους μαθητές της Γ Λυκείου. Στη **Union** θα βρείτε μόνο μαθηματικούς που υπηρετούν το μεράκι τους και αναζητούν νέους τρόπους προσέγγισης των μαθητών.

Το διαγώνισμα προσομοίωσης δημιουργήθηκε με την άρτια συνεργασία 8 τουλάχιστον μαθηματικών. Τελικά, προέκυψε ένα πιο απαιτητικό διαγώνισμα από αυτό που επιθυμούσαμε. Δεν έχουμε λόγο να φοβίσουμε τους μαθητές λίγες μέρες πριν τις Πανελλαδικές Εξετάσεις, δεν είναι συνειδητή η επιλογή του επιπέδου δυσκολίας αλλά όταν προκύπτει ένα όμορφο ερώτημα, όλοι εκπαιδευτικοί το γνωρίζουν, δεν μπορείς να το κόψεις όσο απαιτητικό ερώτημα και να είναι!

Αν ο διδάσκοντας κρίνει ότι το διαγώνισμα είναι αρκετά απαιτητικό για τους μαθητές τους τότε προτείνουμε να γίνουν τα θέματα μεμονωμένα ως ασκήσεις. Ο διδάσκοντας γνωρίζει καλύτερα το επίπεδο των μαθητών του και είναι υπεύθυνος για την καλύτερη μόρφωσή τους.

Προφανώς τα θέματα που προτείνουμε είναι πιο απαιτητικά από τα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων με σκοπό να γίνει μια τελευταία και δυνατή προπόνηση πριν τον επίσημο αγώνα!

Οποιαδήποτε ερώτηση, ένσταση ή σημείωση θέλετε να καταθέσετε μπορείτε να το κάνετε στο email lisari.blogspot@gmail.com.

***«Η ισχύς εν τη ενώσει»***

**Αίσωπος, 620-560 π.Χ.**

**Θέμα Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του $\Delta$. Αν η $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

**Μονάδες 8**

**Α2.** Να διατυπώσετε το Κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 3**

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο Α και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Α».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 2**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) δίνοντας την απόδειξη αν είναι αληθής ή δίνοντας ένα παράδειγμα αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 4**

**Α4.** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στην παρακάτω πρόταση: «Η γραφική παράσταση της f και η αντίστροφής της $f^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία»:

i) $y=0$ ii) $x=0$ iii) $y=-x$ iv) $y=x$

**Μονάδες 2**

**Α5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

β) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ με

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \text{ για κάθε } x\in A\cap B$$

**Μονάδες** 6

**Θέμα Β**

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f$ τρίτου βαθμού για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}\right)=1,\ \nu\in\mathbb{N}$
- $f$ περιττή
- $\int_{-1}^{1} f'(2x)\,dx=14$

**Β1.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+3x,\ x\in\mathbb{R}$.

**Μονάδες 8**

**Β2.** Να μελετήσετε και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$.

**Μονάδες 5**

**Β3.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της $C_f$ σε αντίθετες τετμημένες είναι παράλληλες.

**Μονάδες 5**

**Β4.** Να αποδείξετε ότι τα χωρία $\Omega_1$ και $\Omega_2$ είναι ισεμβαδικά, όπου $\Omega_1$ είναι το χωρίο που περικλείεται από την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(-x_1,f(-x_1)),\ x_1>0$ την $C_f$ , τον αρνητικό ημιάξονα $x'x$ και την ευθεία $x=0$ ενώ $\Omega_2$ είναι αντίστοιχα το χωρίο που περικλείεται από την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $B(x_1,f(x_1))$, την $C_f$, τον θετικό ημιάξονα $x'x$ και την ευθεία $x=0$.

**Μονάδες 7**

**Θέμα Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- παραγωγίσιμη για κάθε $x_0\in(0,\pi)$
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\etaμx-f(x_0)\etaμx_0}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}$, για κάθε $x_0\in(0,\pi)$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\etaμx},\ x\in(0,\pi)$.

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία Ο(0, 0), $A(x, f(x))$ και $B(x, 0)$ με $x \in (0, \pi)$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό $4\,cm/sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ τη χρονική στιγμή που το x ισούται με $\frac{3\pi}{4}$ cm.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το $\int_{\pi/3}^{\pi/2} f(x)dx$

**Μονάδες 6**

**Θέμα Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-\ln 2, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x) - e^{-f(x)} = 1 \text{ για κάθε } x > -\ln 2$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$e^{f(x)} + 1 = ce^{x} \text{ για κάθε } x \in (-\ln 2, +\infty).$$

**Μονάδες 2**

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτηση f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(2e^{x} - 1)$.

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να μελετήσετε την f ως προς τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη *(μονάδες 3)*. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) \le 2x$ για κάθε $x \in (-\ln 2, +\infty)$ *(μονάδες 3)*.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $(-\ln 2, +\infty)$ με $F(1) = 0$ να βρείτε έναν ακέραιο ρ τέτοιον, ώστε η εξίσωση

$$\frac{F(x+1) - 2F(x)}{x-2} - \frac{\int_0^1 3xf(x)dx - 2x^{2018}}{x-1} = 0$$

να παρουσιάζει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ, ρ + 1).

**Μονάδες 8**

**Δ5.** Να βρείτε τον μοναδικό θετικό αριθμό α για τον οποίο ισχύει:

$$\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{2 - e^{-x}} dx = \frac{\ln^2 5}{4}$$

**Μονάδες 5**